

Ορισμός Έστω $V \ni x/L$ μια αντιστοιχία $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$

λεγεται ΕΡΜΙΤΙΑΚΟ γινόμενο στον V αν

i) $\langle v+w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle$ για κάθε $u, v, w \in V$

$\langle \lambda v, u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ $u, v \in V$

(δηλ) $\langle -, u \rangle: V \rightarrow \mathbb{C}$ γραμμική $\forall u \in V$

iii) $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$ για κάθε $u, v \in V$

και $- =$ μιγαδικός συζυγής (δηλ $|\overline{a+ib}| = a-ib$)

iv) (Από iii) αν $u \in V$ $\langle u, u \rangle = \overline{\langle u, u \rangle}$, άρα $\langle u, u \rangle \in \mathbb{R}$)

Πρέπει $\langle u, u \rangle \in \mathbb{R}$ θετικός όταν $u \in V - \{0_V\}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\langle, \rangle: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ $\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \dots + z_n \bar{w}_n$

Για το iv) $A = \langle (z_1, \dots, z_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n$

Έστω $z_j = a_j + ib_j$ με $a_j, b_j \in \mathbb{R}$

Τότε $A = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \dots + a_n^2 + b_n^2$ και το iv) ισχύει.

Πρόταση Έστω $(V, \langle, \rangle) \in \mathcal{X}$ Τότε

i) $\langle 0_V, w \rangle = \langle w, 0_V \rangle = 0_{\mathbb{C}}$ για κάθε $w \in V$

ii) $\langle v, w+u \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, u \rangle$ για κάθε $u, v, w \in V$

iii) $\langle u, \lambda w \rangle = \bar{\lambda} \langle u, w \rangle$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ $u, w \in V$

Ορισμός Αν $(V, \langle, \rangle) \in \mathcal{X}$ $w \in V$ ορίζουμε $\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} = \{ \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \geq 0 \}$
 $\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$

Ορίζουμε $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ $d(u, w) = \|u - w\|$

Προσέχει: Γενικά δεν έχουμε έννοια γωνίας για $\langle u, w \rangle \in \mathbb{C}$

Ορισμός Έστω $(V, \langle, \rangle) \in \mathcal{X}$ Μια παρτη e_j εν

του V λεγεται ορθοκανονική αν

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1_{\mathbb{C}} & \text{αν } i=j \\ 0_{\mathbb{C}} & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Πρόταση Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ΜΕΧ πεπερ. διαστάσεων με $V \neq \{0\}$
 Έστω $g_1, \dots, g_n$ βάση του V και T_{g_i} επί του $\mathbb{C}$

Ορίζουμε $h_1, \dots, h_n \in V$ με $h_1 = g_1$

$$h_2 = g_2 - \frac{\langle g_2, h_1 \rangle}{\langle h_1, h_1 \rangle} h_1$$

$$h_n = g_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle g_n, h_j \rangle}{\langle h_j, h_j \rangle} h_j$$

Τότε h_i κάθε ορισμένη i είναι $\perp$ h_j για $j < i$.
 Τότε $h_1, \dots, h_n$ είναι ορθοκανονική βάση του V

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω $V = \mathbb{C}^n$ με $\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j$
 Τότε η κανονική βάση $e = (e_1, \dots, e_n)$ με $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ επί του V
 είναι ορθοκανονική

$X \in \Gamma$ επί του $\mathbb{R}$	Μεγιστοποιεί «παραγινόμενο χιρά» $M \in X$ επί του $\mathbb{C}$
GRAMM ΙΣΟΜ	GRAMM ΙΣΟΜ
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ	ΜΟΝΑΔΙΔΙΟΙ (UNITARY)
$T: V \rightarrow V \Leftrightarrow T^*: V \rightarrow V$	(Υπαρχει και εδώ)
Πραγματικοί συμμετρικοί	Μιγαδικοί Ερμιτιανοί πίνακες
$\hookrightarrow (\exists A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ με } A^t = A)$	$\exists B \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ με } (B)^t = B$
Θεώρημα Euler	

Ορισμός Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle), (W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ δύο μιγαδικοί Ερμιτιανοί Χίρα
 και $T: V \rightarrow W$ μια γραμμική (επί του $\mathbb{C}$) απεικόνιση. Η T λέγεται
 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΙΣΟΜΕΤΡΙΑ αν είναι 1-1, επί και $\langle T(u), T(w) \rangle = \langle u, w \rangle$
 $\forall u, w \in V$

Πρόταση Υπάρχει Αν οι V, W πεπερ. διαστάσεων υπάρχει γραμμική
 Ισομετρία αν και μόνο αν $\dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{C}} W$
 $\hookrightarrow T(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) = (W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

και χαρακτηρίζεται όπως είναι ορθοκανονικός διπλός πίνακας
 για ορθοκ. βάση του V σε μια ορθοκανονική βάση του W .

Ορισμός Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ο A λέγεται μοναδιαίος αν
 $(A)^t A = A (A)^t = I_n$ Δηλ A είναι αντιστρέψιμος με αντιστρεψι-
 μόν ~~α~~ αντίστροφο ουσική A^t

$$U(n) = \{ A \in \mathbb{C}^{n \times n} / A \text{ μοναδιαίος} \}$$

$$SU(n) = \{ A \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ μοναδιαίος και } \det A = 1 \}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Κάθε ορθογώνιος πίνακας είναι μοναδιαίος

$$O = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ είναι μοναδιαίος αλλά δεν είναι για } \mathbb{R}^{2 \times 2} \subseteq \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

αρα δεν είναι ορθογώνιος

Πρόταση $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ μοναδιαίος $\Rightarrow |\det A| = 1$, δηλ αν $\det A = a + ib$
 με $a, b \in \mathbb{R}$ τότε $a^2 + b^2 = 1$

Ορισμός Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $\forall A \in U$

i) A ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΣ

(*) ii) ΣΤΗΛΕΣ του A ορθοκανονική βάση για το $\mathbb{C}^n$ με

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j$$

iii) ΓΡΑΜΜΕΣ του A ορθοκανονική βάση για το $\mathbb{C}^{1 \times n}$ με
 $\langle (z_1 \dots z_n), (w_1 \dots w_n) \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j$

Πρόταση Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ΜΟΝΩΤΟΝΟ
 i) Αν $\lambda \in \sigma(A)$ τότε $|\lambda| = 1$

ii) Αν λ_1, λ_2 ιδιοτιμές του A οι οποίες $\forall \lambda_1, \lambda_2$ του $\mathbb{C}^{n \times n}$ ορίζονται ως προς το $\oplus$

iii) Ο M είναι ΜΟΝΩΤΟΝΟ ΔΙΑΓΕΝΝΙΣΜΟΣ επί του $\mathbb{C}$
 Δηλ υπάρχει $(\exists) P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ μονωτικό ώστε $P^{-1}MP$ διαγώνιος

Ορισμός Έστω $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Ο M λέγεται ΕΡΜΗΤΙΑΝΟΣ
 αν $(M)^T = M$

πχ Ο $M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ έχει $(M)^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \neq M$

άρα ο M ΟΧΙ ΕΡΜΗΤΙΑΝΟΣ

Ο $N = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ είναι ΕΡΜΗΤΙΑΝΟΣ Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $A^T = A$
 τότε ο A ΕΡΜΗΤΙΑΝΟΣ

~~Ερμητιανό γινόμενο~~
 $(z, w) = \langle z, w \rangle$

~~$\langle z, w \rangle = \text{Tr}(w^* z)$~~

~~$=$~~

~~$\langle zM, wM \rangle = \text{Tr}(\bar{w}^* (M)^T M z) = \text{Tr}(\bar{w}^* z) = \langle z, w \rangle \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^n$~~

~~Εστω~~

~~ΕΡΜΗΤΙΑΝΟΣ~~

Θεμελιώδες Θεώρημα για τον ΕΡΜΗΤΙΑΝΟΤΗΤΑ

Έστω $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ΕΡΜΗΤΙΑΝΟΣ (δηλ $M^T = M$) τότε

i) Κάθε ιδιοτιμή λ του M είναι στο $\mathbb{R}$. Μάλιστα, ο M έχει n ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (αν τις μετρήσουμε με πολλαπλότητες)

ii) Υπάρχει $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ΜΟΝΩΤΟΝΟ ώστε $P^{-1}MP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

Επιπλέον Γνωρίζω

$$z = (z_1, \dots, z_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$$

$$\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j = \text{Tr} \left(\underset{\substack{\uparrow \text{ } n \times n \\ z}}{z} \underset{\substack{\uparrow \text{ } n \times 1 \\ \bar{w}^t}}{\bar{w}^t} \right)$$

Εστω $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ μοναδιαία, δηλ $M(\bar{M})^t = (\bar{M})^t M = I_n$

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}^n \quad \langle zM, wM \rangle &= \text{Tr}(zM(\bar{w}M)^t) = \text{Tr}(zM(\bar{w}\bar{M})^t) = \text{Tr}(zM\bar{M}^t\bar{w}^t) = \\ &= \text{Tr}(z\bar{w}^t) = \langle z, w \rangle \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

δυσκολία 8, Αξιόσημο 4, (ερωτηματολόγιο)
 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, με $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Δείξτε ότι:

- α) ο A όχι διαγωνίσιος $\mathbb{R}$.
 β) ο A διαγωνίσιος $\mathbb{C}$.

Λύση

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1, \text{ ανήκει στο } \mathbb{R} \\ = (x-i)(x+i) \text{ στο } \mathbb{C}[x]$$

Ενι τω $\mathbb{R}$ το $\chi_A(x)$ δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβαθμίων, άρα ο A όχι διαγωνίσιος στο $\mathbb{R}$.

Ενι τω $\mathbb{C}$, το $\chi_A(x)$ αναλύεται σε γινόμενο διακεκλιμένων πρωτοβαθμίων, άρα ο A διαγωνίσιος στο $\mathbb{C}$.

γ) Βρείτε $P \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ αντιστρέψιμο και $D \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ διαγώνιο με $P^{-1}AP = D$
 $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i, D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

$$V_A(\lambda_1) = V_A(i) : \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -ix + y = 0$$

$$V_A(i) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}, x \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_A(\lambda_2) = V_A(-i) : \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow ix + y = 0$$

$$V_A(-i) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}, x \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Άρα } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$$

NO

DATE

Επομένως: $P^{-1}AP = P^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)$

$$= P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2i} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2i \\ -1/2 & 1/2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & -i \\ -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & -i \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

= D

Πρόβλημα 8, Άσκηση 7.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός γραμμικός πίνακας, οπότε $A^3 = A^2$. Δείξτε ότι $A^2 = A$.

Λύση
Αφού $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός $\Rightarrow A$ διαγ. / $\mathbb{R}$, οπότε υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, και $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος, με $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$$\text{Τότε } (A^2 = A^3) \Rightarrow \lambda_i^2 = \lambda_i^3, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Από $\lambda_i = 0$ ή $\lambda_i = 1$ $\Rightarrow$ οπότε

$$\text{Παρατηρούμε } \lambda_i^2 = \lambda_i \Rightarrow (P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP) \\ \Rightarrow P^{-1}A^2P = P^{-1}AP \Rightarrow A^2 = A$$

Β' τμήμα

NO

DATE

Έστω $m_A(x) \in \mathbb{R}[x]$ το ελάχιστο πολ/νο του A . Αφού $A^3 = A^2 \Rightarrow A$ ικανοποιεί το $x^3 - x^2 \in \mathbb{R}[x]$ άρα το $m(x)$ διαιρεί το $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$.

Αφού $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ευκλείδεικός $\Rightarrow A$ διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$. $\Rightarrow m_A(x)$ γινόμενο διακεκριμένων γραμμικών στο $\mathbb{R}[x]$.

Άρα $m_A(x) \in \{x, x-1, x^2-x\}$:

$m_A(x) = x \Rightarrow A = \mathbb{O}$ και $A^3 = A$ ικανοποιείται.

$m_A(x) = x-1 \Rightarrow A = I_n$ >> >>

$m_A(x) = x^2 - x \Rightarrow A^2 = A$.